TD n°11: Fonctions harmoniques et sous-harmoniques.

Analyse complexe 2024-2025, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Exercices à faire en priorité : 1-2-3-4-5-8. Les exercices marqués d'un $\clubsuit$ sont des exercices plus difficiles, plus longs, ou plus loin du cours.

Fonctions harmoniques.

Exercice 1. Le noyau de Poisson.

1. Démontrer que le noyau de Poisson

$$P(z, \zeta) = \Re \left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z} \right) = \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}$$

est donné par

$$P(re^{it}, e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{ni(t-\theta)}$$

et utilisez cette formule pour redémontrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, \zeta) d\zeta = 1.$$

2. Soit $\phi \in L^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ une fonction intégrable sur le cercle. Démontrons que pour $r < 1$, on a

$$P_{\mathbb{D}}\phi(re^{it}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n r^{|n|} e^{nit}$$

où les $(a_n)_n$ sont une suite bornée de nombres complexes vérifiant $a_{-n} = \bar{a}_n$, que l'on explicitera.

3. Supposons à présent que ϕ est continue à valeurs complexes, et notons, pour $\zeta \in \mathbb{T}$, $\phi_r(\zeta) = P_{\mathbb{D}}\phi(r\zeta)$. Démontrer que $\phi_r \rightarrow \phi$ uniformément et en déduire le théorème de Stone-Weierstrass pour le cercle.

Exercice 2. Le problème de Dirichlet holomorphe.

1. Démontrer qu'il n'existe pas de fonction holomorphe sur le disque unité $\mathbb{D}$ qui s'étend en une fonction continue valant $\zeta \mapsto \bar{\zeta}$ sur le cercle.
2. De manière générale, soit φ une fonction continue sur le disque. Démontrer qu'une condition nécessaire pour qu'il existe une fonction holomorphe f sur $\mathbb{D}$ qui se prolonge en ϕ au bord est

$$\int_0^{2\pi} \phi(e^{i\theta}) e^{ni\theta} d\theta = 0$$

pour tout $n \geq 1$.

3. Démontrer que cette condition est suffisante. On pourra construire séparément les parties réelle et imaginaire de la fonction recherchée.

Exercice 3. Gradient d'une fonction harmonique positive.

1. Soit f une fonction holomorphe. Démontrer que le gradient de $\Re(f)$ est f' (vue comme application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$).
2. Démontrer que le noyau de Poisson vérifie, pour $|z| < 1$, $|\zeta| = 1$:

$$|\nabla_z P(z, \zeta)| = \frac{2}{1 - |z|^2} P(z, \zeta).$$

¹Merci à Hadrien pour ce raton-laveur en Tikz !

3. En déduire que si u est une fonction harmonique positive sur $\mathbb{D}(0, \rho)$, elle vérifie pour tout $z \in \mathbb{D}(0, \rho)$ l'inégalité

$$|\nabla u(z)| \leq \frac{2\rho}{\rho^2 - |z|^2} u(z).$$

4. Soit U un ouvert simplement connexe quelconque de $\mathbb{C}$, $z \in U$. On rappelle qu'il existe un unique biholomorphisme $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow U$ qui envoie 0 sur z et a une dérivée réelle positive, on note $R(U, z)$ cette dérivée positive. Démontrer que si u est une fonction harmonique positive sur U , alors

$$|\nabla u(z)| \leq \frac{2}{R(U, z)} u(z).$$

Exercice 4. Récupération d'une fonction holomorphe depuis sa partie réelle.

Soit f une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$, u sa partie réelle. Démontrer que pour $z \in \mathbb{D}$, on a

$$f(z) = i\Im f(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} u(e^{i\theta}) d\theta.$$

Exercice 5. Harmonicité d'un produit.

Soient u, v des fonctions harmoniques non-constantes sur un ouvert connexe U . Démontrer que uv est harmonique si et seulement s'il existe une constante a telle que $u + iav$ est holomorphe sur U . On pensera à écrire $\Delta = 4\partial\bar{\partial}$.

Exercice 6. Invariance par biholomorphismes.

Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{C}$, $\varphi : U \rightarrow V$ un biholomorphisme entre ces deux ouverts. Pour $u \in C^2(V, \mathbb{R})$, démontrer que

$$\Delta(u \circ \varphi) = (\Delta u) \circ \varphi \cdot |\varphi'|^2.$$

et en déduire la précomposition par un biholomorphisme préserve les fonctions harmoniques et sous-harmoniques.

Exercice 7. Fonctions pluriharmoniques $\mathbb{C}^n$

On a vu dans un TD précédent qu'une fonction harmonique sur $\mathbb{C}^n$ n'est pas nécessairement, même pas localement, la partie réelle d'une fonction holomorphe (c'est-à-dire une fonction $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ qui vérifie $\partial_j f = 0$ pour tout j).

Une fonction $u : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite pluriharmonique si elle vérifie $\partial_j \bar{\partial}_k u = 0$ pour tous j, k , où

$$\partial_j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \quad \bar{\partial}_j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right).$$

où x_j, y_j désignent les parties réelles et imaginaires des coordonnées $z_1, \dots, z_n$ sur $\mathbb{C}^n$.

- Démontrer que la partie réelle d'une fonction holomorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$ est pluriharmonique.
- Soit $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ un champ de vecteurs C^0 sur un ouvert convexe U de $\mathbb{R}^n$. Supposons qu'il vérifie $\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}$ pour tous j, k . Démontrer que la fonction définie sur U

$$F : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \int_0^{x_1} f_1(t, x_2, \dots, x_n) dt$$

vérifie $\nabla F = \mathbf{f}$.

- Démontrer que si u est pluriharmonique sur un voisinage de 0 de la forme $|z_i| < r_i$, alors en identifiant $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{R}^{2n}$, le champ de vecteurs

$$\mathbf{f}_u = \left(-\frac{\partial u}{\partial y_1}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial u}{\partial y_n}, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

vérifie la condition de la question précédente. On pensera à calculer $\Re(\partial_j \bar{\partial}_k u)$ et $\Im(\partial_j \bar{\partial}_k u)$.

On note v une fonction telle que $\nabla v = \mathbf{f}_u$.

- Vérifier que $\bar{\partial}_j v = i\bar{\partial}_j u$ pour tout j et en déduire que $u + iv$ est holomorphe.

Fonctions sous-harmoniques.

Exercice 8. Inégalité de la moyenne et principe du maximum pour les fonctions sous-harmoniques. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $u \in C^2(U, \mathbb{R})$. On dit que u est (strictement) sous-harmonique si $\Delta u \geq 0$ (respectivement $\Delta u > 0$).

1. Soit $u \in C^2(U, \mathbb{R})$, $z \in U$, $\rho > 0$ tel que $\mathbb{D}(0, \rho) \subseteq U$. Démontrer que pour $r < \rho$, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta}) d\theta = u(z) + \frac{r^2}{4} \Delta u(z) + o(r^2)$$

et en déduire que les fonctions strictement sous-harmoniques vérifient l'inégalité de la moyenne locale : pour tout $z \in U$, il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $r < \rho$, on a

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta}) d\theta.$$

2. Soit u une fonction sous-harmonique. En considérant $z \mapsto u(z) + \varepsilon|z|^2$, démontrer que u satisfait l'inégalité de la moyenne.
3. On va exploiter cette propriété pour démontrer que les fonctions sous-harmoniques vérifient le principe du maximum.
- (a) Soit u sous-harmonique sur U connexe. Démontrer que si u admet un maximum global, alors elle est constante.
- (b) Soit $K \subseteq U$ compact. Démontrer que u atteint son maximum sur K au bord de K .
- (c) Supposons que U est borné, et que $\limsup_{z \rightarrow \zeta} u(z) \leq 0$ pour tout $\zeta \in \partial U$: démontrer que $u \leq 0$ sur U .
4. Soit $\bar{\mathbb{D}}(z, \rho) \subseteq U$. Démontrer que

$$u \leq P_{\mathbb{D}(z, \rho)}(u|_{\partial \mathbb{D}(z, \rho)})$$

sur $\mathbb{D}(z, \rho)$ et en déduire que u vérifie l'inégalité de la moyenne globale, c'est-à-dire que si $\bar{\mathbb{D}}(z, \rho) \subseteq U$ alors

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + \rho e^{i\theta}) d\theta.$$

Exercice 9. Potentiel d'une mesure.

Soit μ une mesure de Radon sur $\mathbb{C}$. On dit qu'une fonction $p \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{C})$ est un potentiel de μ si $\Delta p = \mu$ au sens des distributions, c'est-à-dire que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$, on a

$$\int_{\mathbb{C}} p(z) \Delta \varphi(z) d\lambda(z) = \int_{\mathbb{C}} \varphi(z) d\mu(z).$$

1. Trouver un potentiel de la mesure de Lebesgue.
On rappelle que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$, on a :

$$\int_{\mathbb{C}} \log |z| \Delta \varphi(z) d\lambda(z) = 2\pi \varphi(0)$$

2. Trouver un potentiel de la masse de dirac δ_w en w .
3. Si μ est à support compact, on définit

$$p_\mu(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \log |z - w| d\mu(w).$$

Démontrer que p_μ (qui peut valoir $-\infty$ en certains points) est un potentiel de μ , et qu'elle est harmonique sur $\mathbb{C} \setminus \text{Supp}(\mu)$.

4. Démontrer que pour $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\int_0^{2\pi} \log |z - e^{i\theta}| d\theta = 2\pi \log^+ |z|$$

où $\log^+ t$ désigne $\max(\log(t), 0)$.

5. Démontrer que p_μ vérifie l'inégalité de la moyenne. Est-elle toujours de classe C^2 ?